Maranda Linț
Dorin Linț
Rozalia Marinescu
Dan Ștefan Marinescu
Mihai Monea
Steluța Monea
Marian Stroe

Matematică de excelență

pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență

clasa a VII-a

mate 2000 – excelență

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

Cuprins

Capitolul I
MULŢIMI DE NUMERE. RADICALI

A. ELEMENTE DE TEHNICĂ MATEMATICĂ

1) Dacă $a \in \mathbb{N}$ şi $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{N}$.

2) Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ şi $\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{N}$ şi $\sqrt{b} \in \mathbb{N}$.

3) Dacă a şi b nu sunt pătratele unor numere raţionale, atunci $(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \notin \mathbb{Q}$.

4) Dacă $a \in \mathbb{Q}$ şi $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow (a \pm b) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5) Dacă $a \in \mathbb{Q}^*$ şi $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow ab \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

6) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, $\forall a, b \geq 0, a \geq \sqrt{b}$. (formula radicalilor compuşi).

O noţiune relativ recentă în matematică este noţiunea de *evaluare p-adică* (*p–adic valuation* în limba engleză, *valuation p-adic* în limba franceză). Această noţiune constituie un mijloc sistematic şi adesea eficace pentru utilizarea în toată „puterea" ei a teoremei de descompunere în factori primi. Deşi nu este un panaceu, metoda furnizată de această noţiune se dovedeşte utilă în multe demonstraţii sau rezolvări de probleme de aritmetică. Pentru început avem nevoie de următoarea:

Definiţie: Dacă p este un număr prim, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci evaluarea *p-adică* a numărului n este cel mai mare număr natural k astfel încât $p^k \mid n$. Se va nota $k = v_p(n)$. Cu alte cuvinte $v_p(n)$ este exponentul lui p în descompunerea în factori a numărului n.

EXEMPLE: $v_2(2)=1$, $v_3(27)=3$, $v_5(10)=1$, $v_3(20)=0$, $v_7(49)=2$, $v_2(5!)=3$.

Următoarele proprietăţi ale evaluării *p-adice* sunt uşor de dovedit, este nevoie doar de o oarecare abilitate în manevrarea proprietăţilor cu puteri.

P1. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ şi n se descompune sub forma $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, atunci pentru orice $1 \leq i \leq k$, $v_{p_i}(n) = \alpha_i$, iar dacă p este distinct de p_i cu $1 \leq i \leq n$, atunci $v_p(n) = 0$.

EXEMPLE: Dacă $n = 144$, atunci cum $144 = 2^4 \cdot 3^2$ avem $v_2(n) = 4$, $v_3(n) = 2$ şi pentru orice număr prim $p \geq 5$, $v_p(n) = 0$.

P2. Dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$, atunci $m \mid n$ dacă şi numai dacă $v_p(m) \leq v_p(n)$, pentru orice p număr prim.

P3. Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$, atunci pentru orice număr prim p au loc egalităţile:

(*i*) $v_p([a,b]) = \max\{v_p(a), v_p(b)\}$

(*ii*) $v_p((a,b)) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$, unde pentru $x, y \in \mathbb{N}^*$ se notează $\max\{x, y\}$ cel mai mare dintre numerele x, y, $\min\{x, y\}$ cel mai mic dintre numerele x, y, iar $[a, b], (a, b)$ reprezintă cel mai mic multiplu comun, respectiv, cel mai mare divizor comun al numerelor a, b.

Observaţie: Ne va fi utilă egalitatea $x + y = \max\{x, y\} + \min\{x, y\}$, $x, y \in \mathbb{N}$.

P4. Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$ şi p este număr prim, atunci:

(*i*) $v_p(a \cdot b) = v_p(a) + v_p(b)$

(*ii*) $v_p(a + b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$.

Dacă $v_p(a) \neq v_p(b)$, atunci în (*ii*) avem chiar egalitate.

Într-un caz, oarecum general, se poate determina uşor evaluarea *p-adică* şi anume în cazul factorialului. Pentru acest rezultat avem nevoie de câteva noţiuni.

Definiţie: Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Numim factorialul lui n numărul $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. (Se mai citeşte n factorial.)

EXEMPLE: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, $1! = 1$.

Amintim că dacă $a \in \mathbb{Q}$, există şi este unic $k \in \mathbb{Z}$, astfel încât $k \leq a < k + 1$. Numărul k se numeşte partea întreagă a lui a şi se notează $[a]$.

EXEMPLE: $\left[\frac{4}{3}\right] = 1$, $\left[-\frac{4}{3}\right] = -2$, $[-3] = -3$.

De remarcat că dacă $0 \leq a < 1$, atunci $[a] = 0$ şi dacă $a, b \in \mathbb{Q}$, atunci $[a + b] \geq [a] + [b]$.

Ultima inegalitate nu este chiar trivială, dar dacă ne gândim că a şi b pot avea părţile fracţionare mai mari sau egale cu $0,5$, atunci totul se justifică.

Acum putem enunţa un rezultat important legat de evaluarea factorialului.

Teoremă (Formula lui Legendre): Dacă p este un număr prim şi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$v_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots \overset{not}{=} \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k}\right].$$

Comentariu: Cum există $i \in \mathbb{N}$ astfel încât $p^i > n$ şi atunci $\left[\frac{n}{p^l}\right] = 0$, $\forall l \geq i$, aparenta sumă infinită din membrul drept este finită, însă nu ştim de la început „unde se termină". Din această cauză apar punctele de suspensie.

EXEMPLE: $n = 7$, $p = 2$. Atunci $v_2(7!) = \left[\frac{7}{2}\right] + \left[\frac{7}{2^2}\right] + \left[\frac{7}{2^3}\right] = 3 + 1 + 0 = 4$.

$n = 100$, $p = 5$. Atunci $v_5(100!) = \left[\frac{100}{5}\right] + \left[\frac{100}{5^2}\right] + \left[\frac{100}{5^3}\right] = 20 + 4 + 0 = 24$.

„Puterea" acestei teoreme va fi pusă în evidenţă mai târziu, în acest moment rezolvăm un exerciţiu tipic acesteia.

EXEMPLU: În câte zerouri se termină numărul 2013!

Soluție: Cum 10 nu este număr prim, teorema nu poate fi aplicată *ad litteram*. Avem $10 = 2 \cdot 5$. Cel mai mare exponent n astfel încât $10^n \mid 2013!$ este: $\min\{v_2(2013!), v_5(2013!)\}$.

Formula lui Legendre spune imediat că este $v_5(2013!)$, adică

$$\left[\frac{2013}{5}\right]+\left[\frac{2013}{5^2}\right]+\left[\frac{2013}{5^3}\right]+\left[\frac{2013}{5^4}\right]+\left[\frac{2013}{5^5}\right]=402+80+16+3=501.$$

APLICAȚII:

1. Determinați $x \in \mathbb{N}$, astfel încât numărul $A(x) = \sqrt{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x)^2 + 13}$ să fie natural.

Soluție:

Pentru $x \geq 5$, numărul $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x)^2$ are ultima cifră 0, iar $(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot x)^2 + 13$ va avea ultima cifră 3 și $A(x)$ nu poate fi număr natural. Verificăm pentru $x < 5$.

$A(1) = \sqrt{1+13} = \sqrt{14} \notin \mathbb{N}$.

$A(2) = \sqrt{(1 \cdot 2)^2 + 13} = \sqrt{17} \notin \mathbb{N}$.

$A(3) = \sqrt{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2 + 13} = \sqrt{49} = 7 \in \mathbb{N}$.

$A(4) = \sqrt{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^2 + 13} = \sqrt{589} \notin \mathbb{N}$.

$A(x)$ este număr natural pentru $x = 3$.

2. Fie a, b, $c > 0$. Demonstrați că $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}} \cdot \dfrac{1}{1+\sqrt{c}} + \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{\sqrt{c}} \cdot \dfrac{1}{1+\sqrt{b}} = 2$, dacă și numai dacă $a = b \cdot c$.

Romanța Ghiță, Ioan Ghiță

Soluție:

Egalitatea se scrie echivalent:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}\left(1+\sqrt{c}\right)}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{\sqrt{c}\left(1+\sqrt{b}\right)}=2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(1+\sqrt{b}\right)\cdot\sqrt{c}+\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\cdot\left(1+\sqrt{c}\right)\cdot\sqrt{b}=$$

$$=2\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}\left(1+\sqrt{b}\right)\left(1+\sqrt{c}\right) \Leftrightarrow \sqrt{a}\cdot\left(1+\sqrt{b}\right)\cdot\sqrt{c}+\sqrt{b}\cdot\left(1+\sqrt{b}\right)\cdot\sqrt{c}+\sqrt{a}\cdot\left(1+\sqrt{c}\right)\cdot\sqrt{b}+$$

$$+\sqrt{c}\left(1+\sqrt{c}\right)\cdot\sqrt{b}=2\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}\cdot\left(1+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{bc}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}\cdot\left(\sqrt{c}+\sqrt{bc}+\sqrt{b}+\sqrt{bc}\right)+\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}\left(1+\sqrt{b}+1+\sqrt{c}\right)=$$

$$=\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}\cdot\left(2+2\sqrt{b}+2\sqrt{c}+2\sqrt{bc}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}\cdot\left(\sqrt{b}+2\sqrt{bc}+\sqrt{c}\right)=\sqrt{bc}\cdot\left(\sqrt{b}+2\sqrt{bc}+\sqrt{c}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}=\sqrt{bc} \Leftrightarrow a=bc.$$

3. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi numerele $a=\sqrt{n-\sqrt{4n-4}}$, $b=\sqrt{n+\sqrt{4n-4}}$. Calculaţi $a-b$.

Soluţie:

$$n-\sqrt{4n-4}=n-2\sqrt{n-1}=n-1-2\sqrt{n-1}+1=\left(\sqrt{n-1}\right)^2-2\cdot\sqrt{n-1}+1=$$

$$=\left(\sqrt{n-1}-1\right)^2.$$

$$n+\sqrt{4n-4}=n-1+2\sqrt{n-1}+1=\left(\sqrt{n-1}\right)^2+2\cdot\sqrt{n-1}+1=\left(\sqrt{n-1}+1\right)^2$$

$$a-b=\left|\sqrt{n-1}-1\right|-\left|\sqrt{n-1}+1\right|.$$

Pentru $n=1, a-b=|-1|-1=0.$

Pentru $n\geq 2$, $\sqrt{n+1}\geq 1$, deci $\sqrt{n-1}-1\geq 0$ şi $\sqrt{n-1}+1\geq 0.$

$a-b=\sqrt{n-1}-1-\sqrt{n-1}-1=-2.$

În concluzie, $a-b=\begin{cases}0, & n=1\\ -2, & n\in\mathbb{N}, n\geq 2\end{cases}.$

4. Determinaţi perechile (x, y) de numere naturale nenule pentru care $a=\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{y^2}{y+1}$ este număr întreg.

Soluţia I:

Pentru orice $x, y\in\mathbb{N}$, avem:

$$\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}=\frac{x^2-1+1}{x+1}+\frac{y^2-1+1}{y+1}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{(y-1)\cdot(y+1)}{y+1}+\frac{1}{y+1}=$$

$$=x+y+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}-2.$$

$a\in\mathbb{Z}$, dacă şi numai dacă $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}\in\mathbb{N}.$

Pentru $x, y\in\mathbb{N}^*\Rightarrow x\geq 1, y\geq 1\Rightarrow \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}\leq\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$ cu egalitate dacă şi numai dacă $x=y=1$.

Soluţia a II-a:

$$a=\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}=\frac{x^2+x-x}{x+1}+\frac{y^2+y-y}{y+1}=x+y-\left(\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}\right)=$$

$$=x+y-\frac{2xy+x+y}{(x+1)(y+1)}=x+y-\frac{(xy+x+y+1)+(xy-1)}{xy+x+y+1}=x+y-1-\frac{xy-1}{xy+x+y+1}.$$

Dar $0 \le xy - 1 < xy < xy + x + y + 1$, $\forall x, y \in \mathbb{N}$ şi atunci $a \in \mathbb{Z}$, dacă şi numai dacă $x \cdot y - 1 = 0$, ceea ce are loc numai pentru $x = y = 1$.
Prin urmare, există o singură pereche de numere naturale nenule, şi anume $(1, 1)$, pentru care $a \in \mathbb{Z}$.

5. Aflaţi cel mai mare număr natural n pentru care 3^n divide numărul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2013$.
Soluţie:
Dintre numerele 1, 2, 3, …, 2013; (s) fiecare al treilea număr este divizibil cu 3.
$2013 = 3 \cdot 671$.
În şirul (s) sunt 671 numere divizibile cu 3.
Dintre aceste 671 numere, fiecare al treilea număr este divizibil cu 3^2.
$671 = 3 \cdot 223 + 2$, deci în şirul (s) sunt 223 numere divizibile cu 3^2.
Procedând la fel, aflăm câte numere din şirul (s) sunt divizibile cu 3^3, 3^4, 3^5,… şi apoi aflăm exponentul lui 3 din descompunerea în factori a numărului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2013$.
La împărţirile efectuate am reţinut doar câturile împărţirilor, acestea fiind părţile întregi ale numerelor $2013 : 3$, $2013 : 3^2$, $2013 : 3^3$, etc.
Deoarece $3^6 = 729$ şi $3^7 = 2187$, obţinem:

$$n = \left[\frac{2013}{3}\right] + \left[\frac{2013}{3^2}\right] + \left[\frac{2013}{3^3}\right] + \left[\frac{2013}{3^4}\right] + \left[\frac{2013}{3^5}\right] + \left[\frac{2013}{3^6}\right] = 671 + 223 + 74 + 24 + 8 + 2 = 1002.$$

$3^{1002} \mid (2013!)$ şi $3^{1003} \nmid (2013!) \Rightarrow n = 1002$.

6. Determinaţi partea întreagă şi partea fracţionară a numărului $\dfrac{a}{b}$, unde:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{49}+\sqrt{48}} \text{ şi}$$
$$b = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} + \ldots + \frac{\sqrt{49}-\sqrt{48}}{\sqrt{49}\cdot\sqrt{48}}.$$

Soluţie:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{49}+\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \ldots +$$
$$+ \frac{\sqrt{49}-\sqrt{48}}{(\sqrt{49}+\sqrt{48})(\sqrt{49}-\sqrt{48})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \ldots + \frac{\sqrt{49}-\sqrt{48}}{49-48} = \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+$$
$$+ \ldots + \sqrt{49}-\sqrt{48} = \sqrt{49}-\sqrt{1} = 7-1 = 6.$$

$$b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} + \ldots + \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{49}\cdot\sqrt{48}} - \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{49}\cdot\sqrt{48}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{48}} - \frac{1}{\sqrt{49}} = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}.$$